Conceptos previos

DEFINICION. El lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante recibe el nombre de *sección cónica* o simplemente *cónica*.

El punto fijo se llama *foco* de la cónica, la recta fija *directriz* y la relación constante *excentricidad* que, normalmente, se representa por la letra e.

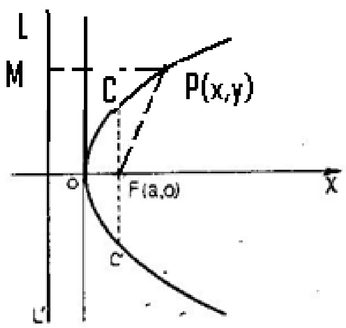
Las secciones cónicas se clasifican en tres categorías, según su forma y propiedades. Estas se establecen de acuerdo con los valores de la excentricidad e.

Si $e < 1$, la cónica se llama *elipse*.
Si $e = 1$, la cónica se llama *parábola*.
Si $e > 1$, la cónica se llama *hipérbola*.

PARABOLA. Sean $L'L$ y F la recta y punto fijos. Tracemos por F la perpendicular al eje x y sea $2a$ la distancia de F a $L'L$. Por definición de parábola la curva debe cortar al eje x en el punto O, equidistante de F y $L'L$. El eje y se traza perpendicular al x por el punto O.

Las coordenadas de F son $(a, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -a$, o bien, $x + a = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de manera que $\dfrac{PF}{PM} = e = 1$.



Entonces, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a$.

Elevando al cuadrado,

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

o bien, $$y^2 = 4ax.$$

De la forma de la ecuación se deduce que la parábola es simétrica con respecto al eje x. El punto en que la curva corta al eje de simetría se denomina *vértice*. La cuerda $C'C$ que pasa por el foco y es perpendicular al eje se llama *latus rectum*. La longitud del *latus rectum* es $4a$, es decir, el coeficiente del término de primer grado en la ecuación.

Si el foco está a la izquierda de la directriz, la ecuación toma la forma

$$y^2 = -4ax.$$

Si el foco pertenece al eje y, la forma de la ecuación es

$$x^2 = \pm 4ay$$

en la que el signo depende de que el foco esté por encima o por debajo de la directriz.

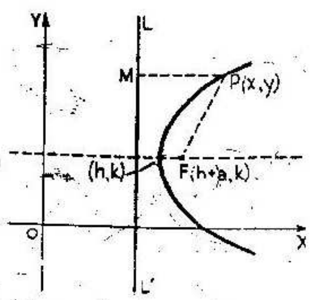
Consideremos ahora una parábola de vértice el punto (h, k), de eje paralelo al de coordenadas x y cuyo foco esté a una distancia a del vértice y a la derecha de él. La directriz, paralela al eje y y a una distancia $2a$ a la izquierda del foco, tendrá la ecuación $x = h - a$ o bien, $x - h + a = 0$.

Llamemos $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la parábola. Como $PF = PM$,

$$\sqrt{(x-h-a)^2 + (y-k)^2} = x - h + a,$$

es decir, $\quad y^2 - 2ky + k^2 = 4ax - 4ah,$

o bien, $\quad (y-k)^2 = 4a(x-h).$



Otras expresiones típicas son:

$$(y-k)^2 = -4a(x-h);$$
$$(x-h)^2 = 4a(y-k);$$
$$(x-h)^2 = -4a(y-k).$$

Que desarrolladas adquieren la forma $\quad x = ay^2 + by + c,$
$\quad y = ax^2 + bx + c.$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del *latus rectum* de la parábola $3y^2 = 8x$, o bien, $y^2 = \frac{8}{3}x$.

De la ecuación de la parábola se deduce que $4a = \frac{8}{3}$, de donde, $a = \frac{2}{3}$. El foco es, pues, el punto de coordenadas $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, y la ecuación de la directriz, $x = -\frac{2}{3}$.

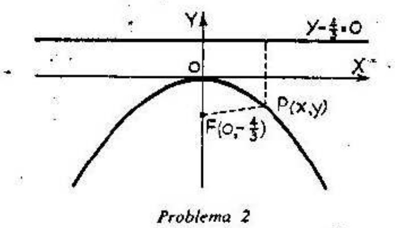
Para hallar la longitud del *latus rectum* se calcula el valor de y para $x = \frac{2}{3}$. Para $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, con lo cual, la longitud del *latus rectum* es $2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

2. Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y por directriz la recta $y - \frac{4}{3} = 0$. Hallar la longitud del *latus rectum*.

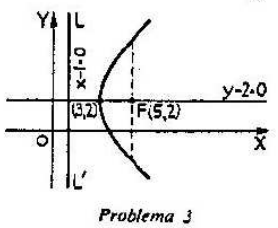
Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la parábola. En estas condiciones,

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2} = y - \frac{4}{3}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $x^2 + \frac{16}{3}y = 0$. *Latus rectum* $= 4a = \frac{16}{3}$.



Problema 2



Problema 3

3. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto (3, 2) y foco (5, 2).

Como el vértice es el punto (3, 2) y el foco (5, 2) se tiene, $a = 2$ y la ecuación adquiere la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$, o sea, $(y-2)^2 = 8(x-3)$.

Simplificando, $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

Sumando y restando términos adecuados, para completar un cuadrado, $y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16 = 6x + 12$, o bien, $(y + 4)^2 = 6(x + 2)$.

El vértice es el punto $(-2, -4)$. Como $4a = 6$, $a = 3/2$. Luego el foco es el punto de coordenadas $(-\frac{1}{2}, -4)$, y la ecuación de la directriz es $x = -7/2$.

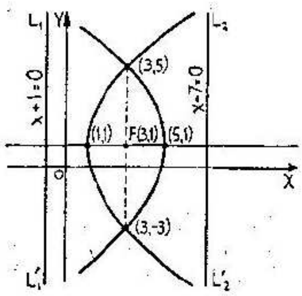
10. Hallar la ecuación de la parábola cuyo *latus rectum* es el segmento entre los puntos $(3, 5)$ y $(3, -3)$.

Aplicamos la ecuación en la forma $(y - k)^2 = \pm 4a(x - h)$.

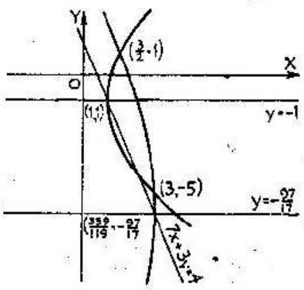
Como la longitud del *latus rectum* es 8, $4a = 8$, e $(y - k)^2 = \pm 8(x - h)$.

Para determinar las coordenadas (h, k) tenemos, $(5 - k)^2 = \pm 8(3 - h)$ y $(-3 - k)^2 = \pm 8(3 - h)$, ya que los puntos $(3, 5)$ y $(3, -3)$ pertenecen a la curva. Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen como valores de h y k los puntos $(1, 1)$ y $(5, 1)$.

Las ecuaciones pedidas son (1) $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$ o $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$
y (2) $(y - 1)^2 = -8(x - 5)$ o $y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$.



Problema 10



Problema 11

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en la recta $7x + 3y - 4 = 0$, de eje horizontal y que pase por los puntos $(3, -5)$ y $(3/2, 1)$.

Aplicamos la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$. Sustituyendo las coordenadas de los puntos dados se obtiene,

$$(-5 - k)^2 = 4a(3 - h) \quad y \quad (1 - k)^2 = 4a(3/2 - h).$$

Como (h, k) pertenece a la recta $7x + 3y - 4 = 0$, se tiene, $7h + 3k - 4 = 0$.

Resolviendo el sistema de estas tres ecuaciones resulta $h = 1$, $k = -1$, $4a = 8$; y $h = 359/119$, $k = -97/17$, $4a = -504/17$.

Luego las ecuaciones pedidas son, $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$ e $\left(y + \frac{97}{17}\right)^2 = -\frac{504}{17}\left(x - \frac{359}{119}\right)$

12. La trayectoria descrita por un proyectil lanzado horizontalmente, desde un punto situado y metros (m) sobre el suelo, con una velocidad v metros por segundo (m/s), es una parábola de ecuación

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\, y,$$

siendo x la distancia horizontal desde el lugar de lanzamiento y $g = 9{,}81$ metros por segundo en cada segundo (m/s²), aproximadamente. El origen se toma en el punto de salida del proyectil del arma.

En estas condiciones se lanza horizontalmente una piedra desde un punto situado a 3 metros (m) de altura sobre el suelo. Sabiendo que la velocidad inicial es de 50 metros segundo (m/s), calcular la distancia horizontal al punto de caída.

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\, y = -\frac{2(50)^2}{9{,}8}(-3), \text{ con lo que } x = 50\sqrt{0{,}61} = 39 \text{ m}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar las coordenadas del foco, la longitud del *latus rectum* y la ecuación de la directriz de las parábolas siguientes. Representarlas gráficamente.

a) $y^2 = 6x$. *Sol.* $(3/2, 0)$, 6, $x + 3/2 = 0$.
b) $x^2 = 8y$. *Sol.* $(0, 2)$, 8, $y + 2 = 0$.
c) $3y^2 = -4x$. *Sol.* $(-1/3, 0)$, 4/3, $x - 1/3 = 0$.

2. Hallar la ecuación de las parábolas siguientes:

a) Foco $(3, 0)$, directriz $x + 3 = 0$. *Sol.* $y^2 - 12x = 0$.
b) Foco $(0, 6)$, directriz el eje x. *Sol.* $x^2 - 12y + 36 = 0$.
c) Vértice el origen, eje el de coordenadas x, y que pase por $(-3, 6)$. *Sol.* $y^2 = -12x$.

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ sea igual a su distancia a la recta $x + 6 = 0$. *Sol.* $y^2 - 6y - 8x - 23 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $(-2, -1)$ y cuyo *latus rectum* es el segmento entre los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -4)$.
Sol. $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$, $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$.

5. Hallar la ecuación de la parábola de vértice $(-2, 3)$ y foco $(1, 3)$.
Sol. $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

6. Dadas las parábolas siguientes, calcular *a)* las coordenadas del vértice, *b)* las coordenadas del foco, *c)* la longitud del *latus rectum* y *d)* la ecuación de la directriz.

(1) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$. *Sol.* *a)* $(2, 2)$, *b)* $(1/2, 2)$, *c)* 6, *d)* $x - 7/2 = 0$.
(2) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$. *Sol.* *a)* $(3/2, -7/4)$, *b)* $(3/2, -4/3)$, *c)* 5/3.
(3) $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$. *Sol.* *a)* $(3/2, 2)$, *b)* $(3, 2)$, *c)* 6, *d)* $x = 0$.

7. Hallar la ecuación de una parábola cuyo eje sea paralelo al eje x y que pase por los puntos $(3, 3)$, $(6, 5)$ y $(6, -3)$. *Sol.* $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$.

8. Hallar la ecuación de una parábola de eje vertical y que pase por los puntos $(4, 5)$, $(-2, 11)$ y $(-4, 21)$.
Sol. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

9. Hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice esté sobre la recta $2y - 3x = 0$, que su eje sea paralelo al de coordenadas x, y que pase por los puntos $(3, 5)$ y $(6, -1)$.
Sol. $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$, $11y^2 - 98y - 108x + 539 = 0$.

10. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros (m) y están separados una distancia de 500 metros (m), quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros (m) sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el puente, y como eje y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80 metros (m) del centro del puente. *Sol.* $x^2 - 1.250y + 12.500 = 0$: 15,12 m.

11. Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 185 metros (m) de altura con una velocidad de 15 metros por segundo (m/s). Hallar la distancia del punto de caída al pie de la torre suponiendo que el suelo es horizontal. *Sol.* 92,5 m.

12. Un avión que vuela hacia el Sur a una altura de 1.500 metros (m) y a una velocidad de 200 kilómetros por hora (km/h) deja caer una bomba. Calcular la distancia horizontal del punto de caída a la vertical del punto de lanzamiento. *Sol.* 972 m.

13. Un arco parabólico tiene una altura de 25 metros (m) y una luz de 40 metros (m). Hallar la altura de los puntos del arco situados 8 metros a ambos lados de su centro. *Sol.* 21 m.